Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. a) Discutir para qué valores de **m** el sistema siguientes es compatible $\begin{cases} 4x+3y+2z=0 \\ 2x+y-z=m \\ 6x+6y+m^2z=-9 \end{cases}$ (7 puntos)

b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & m^2+3 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & m^2+3 \end{vmatrix} = 2.(m^2+3-12) = 2.(m^2-9) = 2.(m-3)(m+3) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$$

$$(m-3)(m+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} m-3=0 \rightarrow m=3 \\ m+3=0 \rightarrow m=-3 \end{cases}$$

$$\forall m \in R-\{-3,3\} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ m=-3$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right) \rightarrow rang(A) = 2 \neq rang\left(A—B\right) = 3 \rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ m=3$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & -18 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow rang(A) = rang(A\,/\,B) = 2 < Número\ de\ incógnitas \rightarrow\ Compatible\ Indeterminado$$

b)
Cuando **m = 3**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow y+4z=-6 \rightarrow y=-6-4z \rightarrow 2x-6-4z-z=3 \rightarrow 2x=9+5z \rightarrow x = \frac{9}{2}+\frac{5}{2}z$$

$$Solución \rightarrow (x\,,\quad y\,,\quad z) = \left(\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\alpha\,,\quad -6-4\alpha\,,\quad \alpha\right) \rightarrow \alpha \in R$$

2. Calcular los máximos y mínimos relativos de la función **f(x) = x³ – 3x +2** (3 puntos), los intervalos de crecimiento y decrecimiento (3 puntos) y haga un borrador de su grafica para x entre **-3** y **3** (4 puntos),

a)

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1) \rightarrow Creciente \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow 3(x-1)(x+1) > 0$

$$\begin{cases} 3 > 0 \rightarrow \forall x \in R \\ x - 1 > 0 \rightarrow x > 1 \\ x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \end{cases}$$

$-\infty$ -1 1

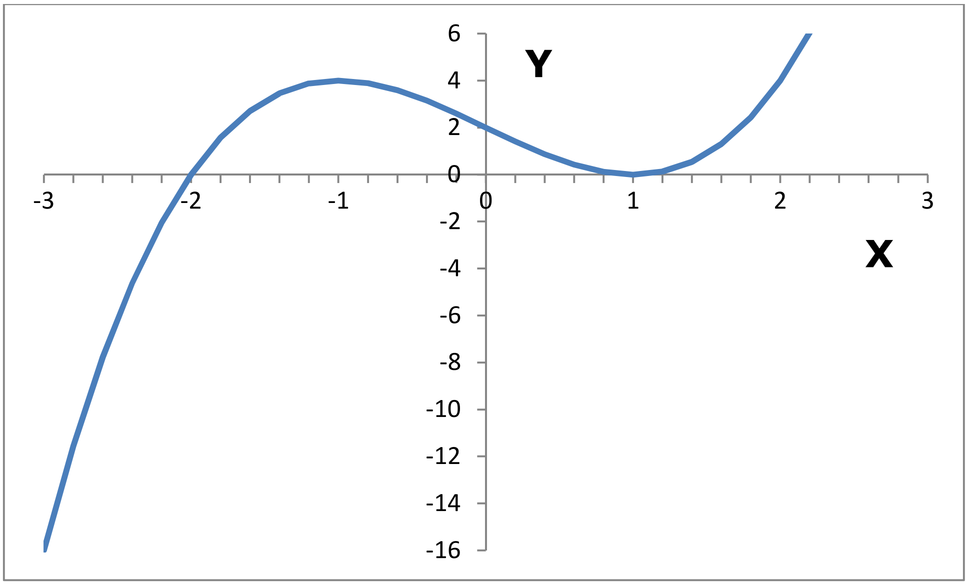
∞

3 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ / $(\boldsymbol{x} < -\mathbf{1}) \cup (\boldsymbol{x} > \mathbf{1})$ **Decreciente** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} - -\mathbf{1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{1}$

Máximo relativo en $\boldsymbol{x} = -\mathbf{1} \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$

Mínimo relativo en $\boldsymbol{x} = \mathbf{1} \rightarrow f(1) = 1^3 - 3.1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$



3. Determinar un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones $r:\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ y también paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas (1 ,1 , 0) y (0 , 1 , 1): (10 puntos)

El plano pedido π tiene como vector director uno que es perpendicular a las rectas r y s que determina el enunciado por tanto es el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas. Conseguido el vector director del plano este es perpendicular al vector **OG**, donde **O** es el origen de coordenadas y **G** el punto genérico del plano, siendo su producto escalar nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} x = 1 - y \to z = 2 - y \to r: \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2-\alpha \end{cases} \to \overrightarrow{v_r} = (-1\,, \quad 1\,, \quad -1) \equiv (1\,, \quad -1\,, \quad 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,, \quad 1\,, \quad 0) - (0\,, \quad 1\,, \quad 1) = (1\,, \quad 0\,, \quad -1) \end{cases} \to$$

$$\overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} + \vec{\jmath} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k} \to \overrightarrow{v_\pi} = (1\,, \quad 2\,, \quad 1)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\,, \quad 2\,, \quad 1) \\ \overrightarrow{OG} = (x\,, \quad y\,, \quad z) - (0\,, \quad 0\,, \quad 0) = (x\,, \quad y\,, \quad z) \end{cases} \to \overrightarrow{v_\pi}.\overrightarrow{OG} = 0 \to (1\,, \quad 2\,, \quad 1).(x\,, \quad y\,, \quad z) = 0$$
$$\to \pi: x + 2y + z = 0$$

4. El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad se modela con una distribución normal de media = 85 kg y desviación típica = 15 kg. Nos piden:
a) ¿Qué porcentaje de la población tiene sobrepeso? Entendemos que una persona adulta de 40 años tiene sobrepeso si pesa más de 100 kg. (4 puntos)
b) Consideramos el colectivo de los individuos más delgados de la comunidad. Si nos dicen que este colectivo representa el 40% de todos los individuos de la comunidad, cual es el peso máximo de un individuo del colectivo? (6 puntos)

Se trata de una distribución N(20,10). Calculemos las probabilidades pedidas:
a)
La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25.
Me piden $p(15 \le X \le 25) = p\left(\frac{15-20}{10} \le Z \le \frac{25-20}{10}\right) = p(-0'50 < Z \le 0'50) =$
$= p(Z \le 0{,}5) - p(Z \le -0{,}5)] = p(Z \le 0{,}5) - [1 - p(Z \le 0{,}5)] = 2\cdot p(Z\ 0, \le 0{,}5) - 1 = 2\cdot 0'6915 - 1 = 0'383.$

b)
La calificación que solo superan o igualan el 20% de los alumnos.

b) Tenemos $p(X \ge k) =$ **0'2** $= 1 - p(X \le k) = 1 - p\left(Z \le \frac{k-20}{10}\right) \to p\left(Z \le \frac{k-20}{10}\right) = 1 - 0'2 = 0'8$, de donde

utilizando F(0.8416) = 0,8 tenemos $\frac{k-20}{10} = 0'8416 \to$ **k = 8'416 + 20 = 28'416. Luego las calificaciones que superan el 20% son a partir de 28'416.**

OPCIÓN B

1. Consideramos la matriz y los vectores siguientes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

Calcular **x**, **y** y **z** para que se satisfaga que: **A.b – 2c = d**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x+2y-z \\ x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

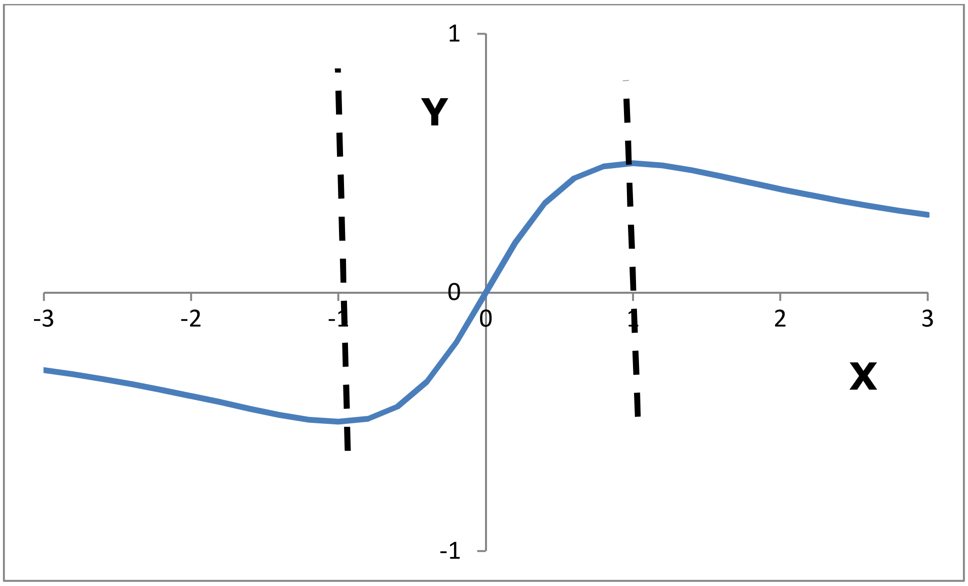
$$\to -2x = -2 \to x = 1$$

$$\boldsymbol{-1 + y = 0 \to y = 1 \to 2 + 1 - z = 2 \to z = 1 \to Solución \to (x\,,\ \ y\,,\ \ z) = (1\,,\ \ 1\,,\ \ 1)}$$

Escriba aquí la ecuación.

2. Consideramos la región delimitada por la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ el eje de abscisas o eje OX y las rectas verticales **x = -1** y

x = 1. Haga un borrador de la región pedida (6 puntos) y calcular el área de la región (4 puntos)



$$f(-x) = \frac{(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{x}{1+x^2} = f(x) \to Es\ simétrica\ respecto\ a\ OY$$

$$A = 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = 2\int_1^2 \frac{1}{t}\,\frac{dt}{2} = 2.\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2\ u^2$$

$$1 + x^2 = t \to 2x\,dx = dt \to\ x\,dx = \frac{dt}{2} \to \begin{cases} Cuando\ x = 1 \to t = 2 \\ Cuando\ x = 0 \to t = 1 \end{cases}$$

3. Consideramos los puntos A (0 , 0 , 0), B (1 ,1 , 0) y C (0 , 1 , 1): Calcular el área del triángulo que forman los puntos A, B y C

(5 puntos) y Determinar el ángulo que forman los vectores AB y AC: (5 puntos)

El área del triángulo **ABC** es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC.**

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1,\quad 1,\quad 0)-(0,\quad 0,\quad 0)=(1,\quad 1,\quad 0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,\quad 1,\quad 1)-(0,\quad 0,\quad 0)=(0,\quad 1,\quad 1)\end{cases}\rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{\imath}+\vec{k}-\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,\quad -1,\quad 1)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}\rightarrow Área=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\,u^2$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1,\quad 1,\quad 0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,\quad 1,\quad 1)\end{cases}\rightarrow \cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{|(1,\quad 1,\quad 0).(0,\quad 1,\quad 1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}.\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{|1.0+1.1+0.1|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\rightarrow$$

$$\theta=\operatorname{arc}\cos\frac{1}{2}=60º=\frac{\pi}{3}\,rad$$

4. Se ha hecho un estudio sobre el miedo a volar y el nivel de estrés en una cierta comunidad. Nos dicen que el 60% de los individuos no tienen miedo a volar, el 50% tiene un nivel bajo de estrés, el 25% tiene un nivel medio y el 5% tiene un nivel alto de estrés y miedo a volar. Sabiendo, además, que el 5% de los individuos tiene un nivel de estrés medio y no tiene miedo a volar. Se pide:
a) Probabilidad de que un individuo de la comunidad tenga un nivel de estrés medio y miedo de volar. (3 puntos)
b) Sabiendo que un individuo tiene miedo a volar, cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés? (3 puntos)
c) ¿Son independientes los dos eventos?, nivel de estrés bajo y miedo a volar"? Razona la respuesta. (4 puntos)

Llamemos A, B, C, M y M^C, a los sucesos siguientes, “Bajo de estrés”, “medio de estrés”, "alto de estrés”, “acepta propuesta" y "no acepta propuesta ", respectivamente. (60%=0’6, 25%=0’25, 5%=0’05…..)

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Bajo estres =A	Medio estres=B	Alto estres =C	**Totales**
Miedo a volar = M			0’05	
No miedo volar=M^C		0’05		**0’6**
Totales	**0’5**	**0’25**		

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Estrés bajo =A	Estrés medio =B	Estrés alto =C	Totales
Miedo volar = M	**0’15**	**0’2**	0’05	**0’4**
No miedo volar=M^C	**0’35**	0’05	**0’2**	0’6
Totales	0’5	0’25	**0’25**	**1**

a)
Probabilidad de que un individuo de la comunidad tenga un nivel de estrés medio y miedo de volar.

Me piden **p(estrés medio y miedo volar) = p(B y M)** = **p(B$\cap$M)** = $\dfrac{\text{Estres medio y miedo volar}}{\text{Total (es 1)}}$ = **0’2/1 = 0’2**.

b)
Sabiendo que un individuo tiene miedo a volar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés?

Me piden **p(estrés bajo sabiendo tiene miedo volar) = p(A/M)** = $\dfrac{p(A \cap M)}{p(M)}$ =

= $\dfrac{\text{Estres bajo y miedo volar}}{\text{Total miedo a volar (es 0'4)}}$ = **0’15/0’4 = 3/8 = 0’375**.

c)
¿Son independientes los dos eventos?, nivel de estrés bajo y miedo a volar"? Razona la respuesta.

Sabemos que dos sucesos son independientes, en nuestro caso A y M, si p(A$\cap$M) = p(A)·p(M)
Tenemos p(A$\cap$M) = 0’15, p(A) = 0’5 y p(M) = 0’4.

Como p(A$\cap$M) = 0’15 $\neq$ (0’5)·(0’4) = **0’2 = p(A)·p(M), los suceso volar y tener un nivel bajo de estrés NO son independientes**